

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 7.02.2026

Clasa a IX-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1 (30 puncte)

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $I_n = \left[\frac{n+1}{n}, \frac{13n-2}{n+1} \right]$.

- Determinați $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât mulțimea $I_m \cap \mathbb{Z}$ să aibă 10 elemente.
- Arătați că $I_n \subset I_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 9/2025

Soluție

a) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $1 < \frac{n+1}{n} \leq 2$. Rezultă că primul întreg din I_m este 2..... 5p

Pentru a avea 10 întregi în interval este necesar ca $11 \leq \frac{13n-2}{n+1} < 12$ 5p

Rezultă $m \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ 5p

b)

$I_n = \left[\frac{n+1}{n}, \frac{13n-2}{n+1} \right]$, $I_{n+1} = \left[\frac{n+2}{n+1}, \frac{13n+11}{n+2} \right]$ 2p

$\frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n} \Leftrightarrow n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$ adevărat pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ 5p

$\frac{13n-2}{n+1} < \frac{13n+11}{n+2} \Leftrightarrow 13n^2 + 24n - 4 < 13n^2 + 24n + 11$ adevărat pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ 5p

Din cele două inegalități rezultă că $I_n \subset I_{n+1}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$ 3p

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

Determinați valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $2^{2n+1} - (n+1)^2$ este o putere a lui 2.

Soluție

$n = 0 \Rightarrow 2^{2n+1} - (n+1)^2 = 1 = 2^0$ deci $n = 0$ este soluție 3p

$n = 1 \Rightarrow 2^{2n+1} - (n+1)^2 = 4 = 2^2$ deci $n = 1$ este soluție 3p

$2^{2n+1} - (n+1)^2 < 2^{2n+1}$ 3p

$2^{2n+1} - (n+1)^2 > 2^{2n} \Leftrightarrow 2^{2n} > (n+1)^2$, $\forall n \geq 2$ (se arată prin inducție sau cu inegalitatea Bernoulli)

..... 8p

Deci $2^{2n} < 2^{2n+1} - (n+1)^2 < 2^{2n+1}$, $\forall n \geq 2$ deci nu mai avem soluții 3p

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Fie $ABCD$ un patrulater convex. Notăm cu O intersecția diagonalelor, cu M mijlocul lui (AB) și N mijlocul lui (BC) . Dreapta OM intersectează dreapta CD în P și dreapta ON intersectează dreapta AD în Q . Fie $a = \frac{OC}{OA}$ și $b = \frac{OD}{OB}$.

- a) Exprimați vectorii \overrightarrow{OP} și \overrightarrow{OQ} în funcție de numerele a, b și vectorii \overrightarrow{OA} și \overrightarrow{OB} .
b) Știind că centrul de greutate al triunghiului ANP coincide cu centrul de greutate al triunghiului CMQ , demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

Nelu Chichirim

Soluție

Alegem ca reper vectorii necoliniari $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$

a) $O \in (AC) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = -a\overrightarrow{OA}, \quad a = \frac{OC}{OA}$

$O \in (BD) \Rightarrow \overrightarrow{OD} = -b\overrightarrow{OB}, \quad b = \frac{OD}{OB}$

$P \in (CD) \Rightarrow \exists x \in (0,1)$ astfel încât $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OC} + (1-x)\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OP} = -ax\overrightarrow{OA} - b(1-x)\overrightarrow{OB}$

M mijloc $AB \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

Cum vectorii \overrightarrow{OM} și \overrightarrow{OP} sunt coliniari $\Rightarrow -2ax = -2b(1-x) \Rightarrow x = \frac{b}{a+b}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = -\frac{ab}{a+b}\overrightarrow{OA} - \frac{ab}{a+b}\overrightarrow{OB}$ 5p

$Q \in (AD) \Rightarrow \exists y \in (0,1)$ astfel încât $\overrightarrow{OQ} = y\overrightarrow{OA} + (1-y)\overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = y\overrightarrow{OA} - b(1-y)\overrightarrow{OB}$

N mijloc $BC \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = -\frac{a}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

\overrightarrow{OQ} și \overrightarrow{ON} sunt coliniari $\Rightarrow \frac{y}{2} = \frac{ab(1-y)}{2} \Rightarrow y = \frac{ab}{1+ab} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \frac{ab}{1+ab}\overrightarrow{OA} - \frac{b}{1+ab}\overrightarrow{OB}$ 5p

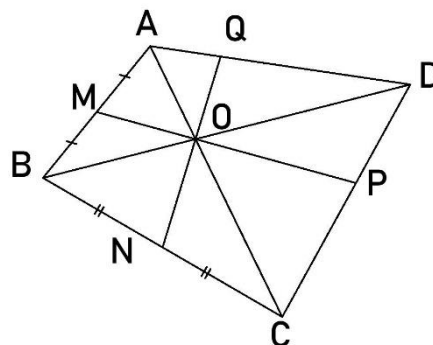
b) Fie G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ANP , respectiv CMQ .

$3\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \left(1 - \frac{a}{2} - \frac{ab}{a+b}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{1}{2} - \frac{ab}{a+b}\right)\overrightarrow{OB}$ 2p

$3\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{1}{2} - a + \frac{ab}{1+ab}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{1+ab}\right)\overrightarrow{OB}$ 2p

$G_1 = G_2 \Rightarrow 3\overrightarrow{OG_1} = 3\overrightarrow{OG_2} \Rightarrow 1 - \frac{a}{2} - \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{2} - a + \frac{ab}{1+ab}$ și $\frac{1}{2} - \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{2} - \frac{b}{1+ab}$ 3p

$\Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB} \Rightarrow O$ este mijlocul lui AC și $BD \Rightarrow ABCD$ paralelogram. 3p



SUBIECTUL 4 (20 puncte)

În triunghiul ABC , fie I centrul cercului înscris care este tangent la laturi în punctele $D \in (AB)$, $E \in (BC)$, $F \in (CA)$. Notăm cu D' , E' , F' punctele diametral opuse lui D , E , respectiv F pe cercul înscris. Fie H_1 , H_2 , H_3 ortocentrele triunghiurilor $D'EF$, $E'DF$, respectiv $F'DE$.

- Arătați că triunghiurile DEF și $H_1H_2H_3$ au același centru de greutate.
- Demonstrați că dacă triunghiurile $H_1H_2H_3$ și ABC au același centru de greutate, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Cătălin Zîrnă
Soluție

a) I este centrul cercului circumscris triunghiurilor $D'EF$, $E'DF$ și $F'DE$ 2p

Folosind relația Sylvester:

$$\overrightarrow{ID'} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IH_1}, \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE'} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IH_2}, \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF'} = \overrightarrow{IH_3} \text{ 3p}$$

D' , E' , F' punctele diametral opuse lui D , E , respectiv F , deci:

$$\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{ID'} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IE'} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{IF'} = \vec{0} \text{ 2p}$$

$$\text{Rezultă } \overrightarrow{IH_1} + \overrightarrow{IH_2} + \overrightarrow{IH_3} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} \text{ 2p}$$

Deci triunghiurile DEF și $H_1H_2H_3$ au același centru de greutate 1p

b) Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Cum triunghiurile $H_1H_2H_3$ și ABC au același centru de greutate, folosind punctul a) avem că triunghiurile ABC și DEF au același centru de greutate. 2p

Notăm $p = \frac{a+b+c}{2}$, unde a , b , c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC și deducem că

$$AD = AF = p - a, BD = BE = p - b, CE = CF = p - c \text{ 2p}$$

$$\overrightarrow{GD} = \frac{(p-a)\overrightarrow{GB} + (p-b)\overrightarrow{GA}}{c}, \overrightarrow{GE} = \frac{(p-c)\overrightarrow{GB} + (p-b)\overrightarrow{GC}}{a}, \overrightarrow{GF} = \frac{(p-a)\overrightarrow{GC} + (p-c)\overrightarrow{GA}}{b} \text{3p}$$

Din $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ și $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$ deducem

$$\left(\frac{p-a}{c} + \frac{p-c}{a} - \frac{p-b}{c} - \frac{p-c}{b} \right) \overrightarrow{GB} + \left(\frac{p-b}{a} + \frac{p-a}{b} - \frac{p-b}{c} - \frac{p-c}{b} \right) \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ deci coeficienții sunt}$$

$$\text{nuli, adică } (b-a) \left(\frac{1}{c} + \frac{p-c}{ab} \right) = 0, (c-a) \left(\frac{1}{b} + \frac{p-b}{ac} \right) = 0, \text{ adică } a = b = c \text{ 3p}$$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 7.02.2026

Clasa a X-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1 (30 puncte)

Fie $S = \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000^2}}$.

a) Demonstrați inegalitatea $\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(k+1)^2}} < \sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k} < \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{k^2}}$, pentru orice $k > 0$.

b) Determinați partea întreagă a numărului S .

Soluție

$$a) \sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k} = \frac{(k+1)-k}{\sqrt[3]{(k+1)^2 + \sqrt[3]{(k+1) \cdot k} + \sqrt[3]{k^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2 + \sqrt[3]{(k+1) \cdot k} + \sqrt[3]{k^2}}}$$

Folosim $3\sqrt[3]{k^2} < \sqrt[3]{(k+1)^2} + \sqrt[3]{(k+1) \cdot k} + \sqrt[3]{k^2} < 3\sqrt[3]{(k+1)^2}$, pentru orice $k > 0$, rezultă $\frac{1}{3\sqrt[3]{(k+1)^2}} <$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2} + \sqrt[3]{(k+1) \cdot k} + \sqrt[3]{k^2}} < \frac{1}{3\sqrt[3]{k^2}} \dots\dots\dots 15p$$

b) Însușind inegalitatea din partea stângă de la punctul a), multiplicată cu 3, pentru $1 \leq k \leq 999$, se obține: $\sum_{k=1}^{999} \frac{1}{3\sqrt[3]{(k+1)^2}} < 3 \sum_{k=1}^{999} (\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}) = 3(\sqrt[3]{1000} - \sqrt[3]{1}) = 27$. Rezultă $S - 1 < 27 \Rightarrow S < 28$ 7p

Însușind inegalitatea din partea dreaptă de la punctul a), multiplicată cu 3, pentru $1 \leq k \leq 1000$, se obține: $\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{3\sqrt[3]{k^2}} > 3 \sum_{k=1}^{1000} (\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}) = 3(\sqrt[3]{1001} - \sqrt[3]{1}) > 3(\sqrt[3]{1000} - \sqrt[3]{1}) = 27$ 7p

Rezultă că $27 < S < 28$. Deci partea întreagă a lui S este 271p

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pentru $X \subset \mathbb{R}$, notăm cu $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$. Dacă $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(f(x)) = x\}$, arătați că $f(A) = A$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 9/2025

Soluție

1. Vom arăta că $f(A) \subset A$10p

Fie $y \in f(A)$. Atunci există $x \in A$ cu $y = f(x)$. Rezultă $f(f(x)) = x$. De unde obținem

$$f(f(f(x))) = f(x) \Rightarrow f(f(y)) = y, \text{ adică } y \in A. \text{ Rezultă că } f(A) \subset A.$$

2. Vom arăta că $A \subset f(A)$ 10p

Fie $x \in A$. Atunci $f(f(x)) = x$. De unde, $f(f(f(x))) = f(x)$ deci $y = f(x) \in A$. Rezultă

$$f(y) = f(f(x)) = x. \text{ Așadar } x = f(y), \text{ ceea ce arată că } A \subset f(A).$$

Din cele două incluziuni rezultă $f(A) = A$

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Fie $a, b, c \in (1, +\infty)$ astfel încât $abc = 2$. Să se arate că

$$\frac{1}{1 + \log_a b \cdot \log_2 c} + \frac{1}{1 + \log_b c \cdot \log_2 a} + \frac{1}{1 + \log_c a \cdot \log_2 b} \leq \frac{9}{4}.$$

Cătălin Zîrnă

Soluție

Notăm $\log_2 a = x, \log_2 b = y, \log_2 c = z \Rightarrow x + y + z = 1$ 3p

Inegalitatea $\Leftrightarrow \frac{x}{x + yz} + \frac{y}{y + zx} + \frac{z}{z + xy} \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow$ 2p

$\Leftrightarrow \frac{yz}{x + yz} + \frac{zx}{y + zx} + \frac{xy}{z + xy} \geq \frac{3}{4}$ 5p

$\frac{yz}{x + yz} + \frac{zx}{y + zx} + \frac{xy}{z + xy} \geq \frac{(yz)^2}{xyz + (yz)^2} + \frac{(zx)^2}{xyz + (zx)^2} + \frac{(xy)^2}{xyz + (xy)^2} \geq \frac{(yz + zx + xy)^2}{3xyz + (yz)^2 + (zx)^2 + (xy)^2} \dots$ 5p

Suficient să arătăm

$\frac{(yz + zx + xy)^2}{3xyz + (yz)^2 + (zx)^2 + (xy)^2} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow (yz)^2 + (zx)^2 + (xy)^2 + 8xyz(x + y + z) \geq 9xyz \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (yz)^2 + (zx)^2 + (xy)^2 \geq xyz(x + y + z)$ adevărată din $u^2 + v^2 + w^2 \geq uv + vw + wu$ 5p

SUBIECTUL 4 (20 puncte)

Rezolvați în $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ sistemul
$$\begin{cases} z_1 \cdot |z_2| + z_2 \cdot |z_1| = 1 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = 1 \end{cases}$$

Nelu Chichirim

Soluție

Din $z_1 \cdot |z_2| + z_2 \cdot |z_1| = 1 \Rightarrow \overline{z_1 \cdot |z_2| + z_2 \cdot |z_1|} = 1 \Rightarrow \overline{z_1} \cdot |z_2| + \overline{z_2} \cdot |z_1| = 1 \Rightarrow \frac{|z_1|^2 \cdot |z_2|}{z_1} + \frac{|z_2|^2 \cdot |z_1|}{z_2} = 1$

$\Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| \cdot \left(\frac{|z_1|}{z_1} + \frac{|z_2|}{z_2} \right) = 1 \Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| \cdot (z_2 \cdot |z_1| + z_1 \cdot |z_2|) = z_1 \cdot z_2 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = z_1 \cdot z_2 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = a \in (0, \infty)$ ^{not}

$z_1 + z_2 = z_1 \cdot z_2 = a \in (0, \infty) \Rightarrow z_1, z_2$ sunt rădăcinile ecuației cu coeficienți reali: $z^2 - a \cdot z + a = 0$, cu $a > 0$ 7p

Dacă $\Delta \geq 0 \Rightarrow z_{1,2} \in \mathbb{R}$, cum $z_1 + z_2 = z_1 \cdot z_2 = a > 0 \Rightarrow z_1, z_2 \in (0, \infty) \Rightarrow |z_1| = z_1, |z_2| = z_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2z_1 \cdot z_2 = 1 \\ z_1 + z_2 = z_1 \cdot z_2 \end{cases} \Rightarrow z_1 + z_2 = z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta = a^2 - 4a < 0$ fals 5p

Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow z_{1,2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, z_2 = \overline{z_1} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1|^2 = |z_2|^2 = r^2, r > 0$.

$z_1 \cdot r + z_2 \cdot r = 1 \Rightarrow \begin{cases} r \cdot (z_1 + z_2) = 1 \\ z_1 + z_2 = z_1 \cdot z_2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow r \cdot r^2 = 1 \Rightarrow r^3 = 1 \Rightarrow r = 1$

$\Rightarrow z_1 + z_2 = z_1 \cdot z_2 = 1 \Rightarrow z_{1,2}$ sunt rădăcinile ecuației $z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \omega, \varpi$.

Deci, soluția sistemului este $S = \{(\omega, \varpi), (\varpi, \omega)\}$ 8p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 7.02.2026

Clasa a XI-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1 (30 puncte)

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

- Arătați că A^n este de forma $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$, unde $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ sunt șiruri de numere reale.
- Arătați că $a_n^2 + b_n^2 = (a^2 + b^2)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dacă $a^2 + b^2 < 1$ arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.
- Dacă $a^2 + b^2 = 1$, iar șirurile a_n și b_n sunt convergente, atunci $A = I_2$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2025

Soluție

a) Prin inducție matematică obținem $a_{n+1} = a \cdot a_n - b \cdot b_n$ și $b_{n+1} = b \cdot a_n + a \cdot b_n$, $n \geq 1$
.....10p

b) $\det(A) = a^2 + b^2$,
 $a_n^2 + b_n^2 = \det(A^n) = \det(A)^n = (a^2 + b^2)^n$5p

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((a^2 + b^2)^n) = 0$
 $a_n^2 \leq a_n^2 + b_n^2$ și $b_n^2 \leq a_n^2 + b_n^2$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 0$,
de unde rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$5p

d) Notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l_1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l_2$

$$a_n^2 + b_n^2 = 1 \Rightarrow l_1^2 + l_2^2 = 1$$

Trec limită în relațiile de recurență și obținem

$$(1 - a)l_1 = -bl_2 \text{ și } (1 - a)l_2 = bl_1.$$

Ridicând la pătrat, adunând cele două relații și folosind $l_1^2 + l_2^2 = 1$, obținem:

$$(1 - l_1)^2 = l_2^2$$

Din fiecare dintre relațiile $1 - l_1 = \pm l_2$, dacă $b \neq 0$, se obține $l_1 = l_2 = 0$

În concluzie $b = 0$, $a = 1$, de unde obținem $A = I_2$10p

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $(AB - BA)^{2025} = (AB - BA)^{2026}$. Atunci:

- a) $(AB - BA)^2 = O_2$.
 b) $AB + BA$ este inversabilă dacă și numai dacă $A \cdot B$ este inversabilă.

Gabriela Constantinescu

Soluție

a) $Tr(AB) = Tr(BA) \Rightarrow Tr(AB - BA) = 0$4 p

Dacă $\det(AB - BA) \neq 0$ rezultă $AB - BA = I_2 \Rightarrow Tr(AB - BA) = 2$, fals.....4p

Rezultă $\det(AB - BA) = 0$ și din relația Cayley – Hamilton $\Rightarrow (AB - BA)^2 = 0$4p

b) $\det(AB - BA) + \det(AB + BA) = 2(\det AB + \det BA)$3p

Rezultă $\det(AB + BA) = 4\det AB$ 3p

$\det(AB + BA) \neq 0 \Leftrightarrow \det AB \neq 0$. Deci $AB + BA$ inversabilă $\Leftrightarrow AB$ inversabilă2p

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definim $A_n \in M_n(\mathbb{R})$, $A_n = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ prin

$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i + j \text{ este un număr prim} \\ 0, & \text{dacă } i + j \text{ nu este număr prim} \end{cases}$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

a) Calculați $\det(A_2)$, $\det(A_3)$ și $\det(A_4)$.

b) Notăm $B = A_3 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determinați B^{2026} .

Cătălin Zîrnă

Soluție

a) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 4p

$\det A_2 = -1$, $\det A_3 = -1$, $\det A_4 = 0$ 3p

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

Calcul direct $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2B$ 6p

Prin inducție, $B^{2n+1} = 2^n B$, $\forall n \geq 1$ 4p

$B^{2026} = B^{2 \cdot 1012 + 1} \cdot B = 2^{1012} B \cdot B = \begin{pmatrix} 2^{1012} & 0 & 2^{1012} \\ 0 & 2^{1013} & 0 \\ 2^{1012} & 0 & 2^{1012} \end{pmatrix}$ 2p

SUBIECTUL 4 (20 puncte)

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale nenule cu proprietatea că $a_{n+1} > \left(n - \frac{1}{n}\right) \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Fie

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \text{ și } y_n = x_n + \frac{n+1}{n \cdot a_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente și au aceeași limită notată cu L .

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \cdot (L - x_n)$.

Nelu Chichirim

Soluție

a) Pentru $n=1 \Rightarrow a_2 > 0 \Rightarrow a_n > 0, (\forall) n \geq 2$ 2p

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{a_{n+1}} > 0, (\forall) n \geq 1 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1} \text{ strict crescător} \dots\dots\dots 2p$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{n+2}{(n+1)a_{n+2}} - \frac{n+1}{na_{n+1}} < 0 \Leftrightarrow \frac{n+2}{(n+1)a_{n+2}} < \frac{n+1}{na_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1}} \Leftrightarrow \frac{n+2}{(n+1)a_{n+2}} < \frac{1}{na_{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} > \frac{n(n+2)}{n+1} \cdot a_{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \text{ (adev)} \dots\dots\dots 2p$$

$$\left(\text{din ipoteza} \Rightarrow a_{n+1} > \frac{n^2-1}{n} \cdot a_n \xrightarrow{n \rightarrow n+1} a_{n+2} > \frac{n(n+2)}{n+1} \cdot a_{n+1} \right) \Rightarrow (y_n)_{n \geq 1} \text{ strict descrescător} \dots\dots\dots 1p$$

Este evident că $x_n < y_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_1 < x_2 < \dots < x_n < y_n < \dots < y_2 < y_1 \dots\dots\dots 2p$

$\Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}$ mărginite

$$\left. \begin{array}{l} (x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1} \text{ mărginite} \\ \text{Cum } (x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1} \text{ strict crescătoare} \end{array} \right\} \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1} \text{ convergente} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Cum } \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n^2-1}{n} = \frac{(n-1)(n+1)}{n}, (\forall) n \geq 2 \Rightarrow \text{(telescopie)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_2} > \frac{(n+1)!}{2n} \Rightarrow a_{n+1} > \frac{(n+1)!}{2n} \cdot a_2 \xrightarrow{n} \infty \Rightarrow a_{n+1} \xrightarrow{n} \infty \Rightarrow \frac{n+1}{na_{n+1}} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} (x_n - y_n) \xrightarrow{n} 0 \\ x_n \xrightarrow{n} l; y_n \xrightarrow{n} l', \text{ cu } l, l' \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow l = l' \dots\dots\dots 2p$$

b) Avem că $(x_n)_n$ strict crescător, $(y_n)_n$ strict descrescător $\Rightarrow x_{n+1} < l < y_n, (\forall) n \geq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x_n < l - x_n < y_n - x_n \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} < l - x_n < \frac{n+1}{na_{n+1}} \cdot a_{n+1} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 < a_{n+1}(l - x_n) < \frac{n+1}{n} \Rightarrow a_{n+1}(l - x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \dots\dots\dots 8p$$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 7.02.2026

Clasa a XII-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1 (30 puncte)

- a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât mulțimea $[a, \infty)$ să fie parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea definită prin $x * y = x + y + xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Determinați valorile parametrului real m pentru care operația "*" definită prin $x * y = 4xy - 6x - 6y + m, \forall x, y \in \mathbb{R}$ este o lege de compoziție pe mulțimea $I = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 9/2025

Soluție

a)

$$a * a \geq a \Rightarrow a \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty) \dots\dots\dots 5p$$

Deoarece mulțimea este $[a, +\infty)$, putem alege $x \in [a, +\infty), x > 0$

$$a * x \geq a \Rightarrow x \cdot (a + 1) \geq 0 \Rightarrow a \in [-1, +\infty) \dots\dots\dots 5p$$

$$\text{Obținem } a \in \{-1\} \cup [0, +\infty) \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Se verifică pe rând } a = -1 \text{ și } a \in [0, +\infty) \dots\dots\dots 3p$$

b)

$$x * y = (2x - 3) \cdot (2y - 3) + (m - 9) \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Dacă } x > \frac{3}{2} \text{ și } y > \frac{3}{2} \text{ rezultă } (2x - 3) \cdot (2y - 3) > 0 \Rightarrow x * y > (m - 9). \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Din } \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{2}}} (x * y) \geq \frac{3}{2} \text{ rezultă } m - 9 \geq \frac{3}{2} \Rightarrow m \in \left[\frac{21}{2}, +\infty\right) \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Se verifică } x * y \geq \frac{3}{2} \text{ pentru orice } m \in \left[\frac{21}{2}, +\infty\right) \dots\dots\dots 3p$$

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

- a) Arătați că $\ln(1+x) \leq x, \forall x \in (-1, +\infty)$.

b) Arătați că $\int_1^2 x \ln(1 + e^{-x^2}) dx < \frac{e^3 - 1}{2e^4}$.

Prelucrare supliment Gazeta Matematică nr. 10/2025

Soluție

a) 10p

b) Din punctul a) se deduce că pentru $x \in [1, 2], \ln(1+x) < x \dots\dots\dots 2p$

$$\text{Rezultă că } \int_1^2 x \cdot \ln(1 + e^{-x^2}) dx < \int_1^2 x \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_1^2 = \frac{e^3 - 1}{2e^4} \dots\dots\dots 8p$$

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Fie (G, \cdot) un grup cu e elementul neutru.

- a) Dacă $a, b \in G$, $a^2 = b^3 = (ab)^5 = e$ și grupul este abelian, arătați că $a = b = e$.
- b) Arătați că există un grup G care conține elementele $a \neq e, b \neq e$ și $a^2 = b^3 = (ab)^5 = e$.
- c) Să se arate că dacă $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, două câte două prime între ele și dacă $a, b \in G$,
 $a^x = b^y = (ab)^z = e$ și grupul este abelian, atunci $a = b = e$.

Cătălin Zîrnă

Soluție

a) $b^3 = (ab)^5 = a^5 b^5 = ab^5 \Rightarrow ab^2 = e \mid a \Rightarrow b^2 = a$ 5p

$$a^2 = b^3 \Rightarrow b^4 = b^3 \Rightarrow b = e \Rightarrow a = e$$

b) În S_5 , $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 5p

c) $(y, z) = 1 \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} : uy + vz = 1$

$$ab = (ab)^{uy+vz} = (ab)^{uy} [(ab)^z]^v = (ab)^{uy} = a^{uy} b^{uy} = a^{uy}$$

$$b^x = a^x b^x = (ab)^x = (a^{uy})^x = a^{u y x} = (a^x)^{uy} = e$$

Dar $b^y = e$ și $(x, y) = 1 \Rightarrow b = e$

Cum $a^x = b^y = e$ și $(ab)^z = e \Rightarrow a^z = e$ iar $(x, z) = 1 \Rightarrow a = e$ 10p

SUBIECTUL 4 (20 puncte)

a) Calculați $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx$, $x > 0$.

- b) Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție care admite o primitivă $F : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ cu proprietățile: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = 0$ și $e^x \cdot f(x) \cdot \sin F(x) = 1$, $\forall x > 0$. Determinați f și F .

Cristina Homencovschi

Soluție

a) $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} \sqrt{e^{2x}-1}} dx$

notăm $\sqrt{e^{2x}-1} = t \Rightarrow \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = dt \Rightarrow \int \frac{1}{t^2+1} dt = \arctgt + C$

Așadar $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \arctg(\sqrt{e^{2x}-1}) + C$ 10p

b) $e^x \cdot f(x) \cdot \sin F(x) = 1 \Leftrightarrow F'(x) \sin F(x) = e^{-x} \Leftrightarrow (-\cos F(x))' = (-e^{-x})'$

deci $\cos F(x) = e^{-x} + k$, $\forall x > 0$ 3p

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \cos F(x) = 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \cos F(x) = e^{-x}$ 1p

$$\sin^2 F(x) + \cos^2 F(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{e^{2x} f^2(x)} + \frac{1}{e^{2x}} = 1 \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{e^{2x}-1}$$

Cum $f(x) > 0$, $\forall x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ 4p

Din a) și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = 0 \Rightarrow F(x) = \arctg(\sqrt{e^{2x}-1})$ 2p